201 المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$
نعتبر النقطتين $A(1)$ و $B(-1)$
لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ ، نضع $f(z)=\frac{|z|^2-\bar{z}}{\bar{z}-1}$ وليكن F التطبيق من $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' ، حيث $z'=f(z)$

1) أ) بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\})\quad \frac{f(z)-z}{z-1}=\frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{|z-1|^2}$

ب) ليكن (Δ) المحور الحقيقي
ولتكن $M(z)$ نقطة من $\mathcal{P}\setminus(\Delta)$ و $M'=F(M)$
تحقق أن : $M'\neq M$ ؛ ثم بين أن $(AM)\perp(MM')$

2) أ) بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\})\quad \frac{f(z)+1}{z-1}=\frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}$

ب) لتكن (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1
ولتكن $M(z)$ نقطة من $\mathcal{P}\setminus(C)$ و $M'=F(M)$
بين أن $M'\neq B$ و أن : $(AM)\parallel(BM')$

ج) استنتج طريقة لإنشاء M' صورة M بالتطبيق F .

3) حدد صورة الدائرة ذات المركز O والشعاع 2 بالتطبيق F.

---

201 المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ و $A(1)$
لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{\frac{5}{4}\}$ ، نضع $f(z)=\frac{z(5z-4)}{5-4z}$
لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{\frac{5}{4}\}$ ، لتكن $M(z)$ و $M'(f(z))$ و $M_1(5z-4)$ و $M_2(5-4z)$

1) بين أن النقط A و M و M_1 و M_2 مستقيمية
2) بين أن : $f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[|z|=1\right.$ أو $\left.4|z|^2-5(z+\bar{z})+4=0\right]$
3) استنتج المجموعة $\mathcal{E}=\{M(z)\mid f(z)\in\mathbb{R}\}$
4) لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1. بين أن :
$M(z)\in\mathcal{C}\Rightarrow M'(f(z))\in\mathcal{C}$
5) نضع ، $(E)=\{M(z)\mid |f(z)|=|z|\}$. حدد المجموعة (E).

---

201 المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ و $A(-i)$
لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ ، نضع : $\varphi(z)=\frac{z(z+i)}{\bar{z}-i}$
وليكن T التطبيق من $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط $M(z)$ بـ $M'(z')$ حيث $z'=\varphi(z)$

1) حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق T.
2) ليكن z من $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. نعتبر النقط $M(z)$ و $N(\bar{z})$ و $M'(\varphi(z))$
أ) بين أن : $|\varphi(z)|=|z|$
ب) تحقق أن ، $(\varphi(z)-\bar{z})(\bar{z}-i)=(z+\bar{z})(z-\bar{z}+i)$ واستنتج أن $\frac{\varphi(z)-\bar{z}}{z+i}\in i\mathbb{R}$
ج) استنتج أن $(AM)\perp(M'N)$ ثم أنشئ M و N و M' في حالة $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$
3) ليكن n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 2$.
نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ (\varphi(z))^n=i^n$ ولتكن S مجموعة حلولها .
أ) بين أن : $(z\in S\Rightarrow |z|=1)$ ثم أن $(z\in S\Rightarrow \varphi(z)=iz^2)$
ب) بين أن (E) تكافئ $z^{2n}=1$ ثم حل المعادلة (E)

2018

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1] أ) حدد الحلين z_1 و z_2 للمعادلة $z^2-4z+8=0$ في $\mathbb{C}$ حيث $Im(z_1)>0$

ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

ج) مثل النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$ في $\mathcal{P}$

2] لكل z من $\mathbb{C}^*$، نضع $\varphi(z)=\frac{1}{\bar{z}}$

ونعتبر التطبيق f من $\mathcal{P}\setminus\{O\}$ نحو $\mathcal{P}\setminus\{O\}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث $z'=\varphi(z)$

أ) حدد لحق كل من A' و B' صورتي A و B على التوالي بالتطبيق f

ب) بين أنه لكل M من $\mathcal{P}\setminus\{O\}$: النقط O و M و M' مستقيمية $(M'=f(M))$

وأن: $OM\times OM'=1$

3] أ) بين أن: $(\forall z\in\mathbb{C}^*)\quad |z-2|=2\Leftrightarrow\left|\frac{1-2\varphi(z)}{\varphi(z)}\right|=2$

واستنتج أن: $(\forall z\in\mathbb{C}^*)\quad |z-2|=2\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}-\varphi(z)\right|=|\varphi(z)|$

ب) لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها $\Omega(2)$ وشعاعها 2

• بين أن: $[AB]$ قطر للدائرة $\mathcal{C}$

• لتكن M نقطة مخالفة للنقطة O، من الدائرة $\mathcal{C}$

بين أن M' تنتمي إلى مستقيم $\mathcal{D}$ يتم تحديد معادلة ديكارتية له

• أنشئ $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$.

2019

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1] نضع $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ ونعتبر النقطتين $A(j)$ و $B(j^2)$

تحقق أن j و j^2 هما حلا المعادلة $z^2+z+1=0$

2] لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{j;j^2\}$، نضع: $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z+1}$

نعتبر التطبيق F من $\mathcal{P}\setminus\{A;B\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z'=f(z)$

أ) بين أن: $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{j;j^2\})\ \left[\overline{f(z)}=f(z)\Leftrightarrow(z\in\mathbb{R}\text{ أو } 2|z|^2+2Re(z)-1=0)\right]$

ثم حدد المجموعة $(\Gamma)=\{M(z)\mid z\neq j, z\neq j^2, f(z)\in\mathbb{R}\}$

ب) نفترض أن $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث θ يتغير في $\left]-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right[$

• بين أن: $f(z)=\frac{2+e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+1}$

• بين أن $M'(f(z))$ ينتمي إلى المنحنى (H) ذي المعادلة: $X^2-3Y^2=1$

1864 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر التطبيق f من $\mathcal{P}\setminus\{O\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

حيث $z'=\overline{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)$ ولكل z من $\mathbb{C}^*$، نضع: $\varphi(z)=\overline{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)$

1] أ) حل في $\mathbb{C}^*$ المعادلة: $\varphi(z)=z$ ؛ نرمز بـ a و b لحلي هذه المعادلة حيث $\operatorname{Im} b<\operatorname{Im} a$.

ب) اكتب a و b على الشكل المثلثي

ج) تبين أن: $a^{8n}+b^{8n}=2^{4n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2] نعتبر النقطتين $A(a)$ و $B(b)$.

أ) بين أن: $\frac{\varphi(z)-b}{\varphi(z)-a}=i\,\frac{\overline{z-b}}{\overline{z-a}}$ $(\forall z\in\mathbb{C}^*\setminus\{a;b\})$

ب) استنتج أن: $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}$ وأعط قياساً للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'B}})$ بدلالة قياس للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$ لكل M من $\mathcal{P}\setminus\{O;A;B\}$ حيث $M'=f(M)$

ج) حدد صورة المستقيم (AB) بالتطبيق f

3] نضع $z=e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي من $[0;\pi]$

أ) اكتب $\varphi(z)$ على الشكل المثلثي.

ب) حدد مجموعة النقط $M'(\varphi(z))$ عندما يتغير θ في $[0;\pi]$.

1863 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. ولتكن $A(i)$ و $B(1)$

لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ ، نضع : $f(z)=\dfrac{z-1}{z-i}$

ونعتبر التطبيق F من $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

حيث $z'=f(z)$

1] حدّد المجموعة : $\mathcal{D}=\{M(z)\mid z\neq i \text{ و } f(z)\in\mathbb{R}\}$

2] أ) بيّن أن : $\overline{f(z)}=-f(z)\Leftrightarrow 2|z|^2=z+\overline{z}-i(z-\overline{z})$ لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{i\}$

ب) استنتج المجموعة : $\mathcal{C}=\{M(z)\mid z\neq i \text{ و } f(z)\in i\mathbb{R}\}$

3] نفترض في هذا السؤال أن $|z|=1$ و $z\neq i$

أ) بيّن أن : $\overline{f(z)}=i\,f(z)$

ب) استنتج أن النقطة $M'=F(M)$ تنتمي إلى مستقيم (Δ) يتم تحديده

ج) بيّن أن $AM\times BM'=\sqrt{2}$

د) حدد موقع M' إذا علمت أن $AM=\frac{1}{2}$ و $Re(z')<0$ ثم حدّد z'.

1861 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ؛ لتكن $A(i)$.

لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ ، نضع $f(z)=\dfrac{z+i}{iz+1}$

وليكن F التطبيق

$$F:\ \mathcal{P}\setminus\{A\}\longrightarrow\mathcal{P}$$
$$M(z)\longmapsto M'(z')\ ;\ z'=f(z)$$

1] أ) بيّن أن : $\left(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}\right)\ \left(|z|=1\Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R}\right)$

ب) لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1؛ حدد صورة $\mathcal{C}\setminus\{A\}$ بالتطبيق F

2] أ) بيّن أن : $\left(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}\right)\ \left(z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow f(z)\in i\mathbb{R}\right)$

ب) ليكن Δ محور الأراتيب محروماً من A ؛ حدد صورة Δ بالتطبيق F .

3] ليكن z عدداً عقدياً يخالف i . نعتبر النقط $M(z)$ و $N(\bar{z})$ و $B(-i)$

أ) بيّن أن : $\left(f(z)+i\right)\left(z-i\right)=2$

ب) استنتج أن النقط B و N و $M'=F(M)$ مستقيمية .

ج) أنشئ النقطة M' إذا علمت أن M تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

4] ليكن z عدداً عقدياً يخالف i.

أ) بيّن أن : $f(z)+\overline{f(z)}=1\Leftrightarrow |1+iz|^2=4\,Re(z)$

ب) استنتج المجموعة $(E)=\left\{M(z)\mid f(z)+\overline{f(z)}=1\right\}$ وحدّد صورة (E) بالتطبيق F .

1858 المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$

لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ نضع : $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$.

لتكن النقطة $A(-1)$ ؛ نعتبر التطبيق F من $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة M لحقها z من $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ بالنقطة M' التي لحقها $z'=f(z)$

1] بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\})\ \left(z=i \Leftrightarrow f(z)=i\right)$

2] بيّن أنه لكل z مخالف i ، لدينا : $\dfrac{f(z)+i}{f(z)-i}=i\,\dfrac{z+i}{z-i}$

3] ليكن $\mathcal{P}_1$ نصف المستوى المعرف بما يلي : $M(z)\in\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)\geq 0$

بيّن أن : $(\forall M\in\mathcal{P}_1\setminus\{A\})\quad F(M)\in\mathcal{P}_1$

4] ليكن k من $\mathbb{R}_+^*$: نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ لمجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $z\neq-1$ و $|f(z)|=k$

حدد $\mathcal{C}_k$